Beiträge zur Darstellung des Wesens und der Grundlagen der Bausparkassen

Auszug aus der

Inaugural-Dissertation

der philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Albert Diggelmann

von Fischenthal, Zürich

Von der philosophischen Fakultät II auf Antrag des Herrn Prof. W. Friedli und nach dem Gutachten des Herrn Prof. A. Bohren angenommen.

Bern, den 21. November 1935.

Der Dekan: Prof. Dr. P. Arbenz

Gedruckt bei Stämpfli & Cie., Bern

1944

Beiträge zur Darstellung des Wesens und der Grundlagen der Bausparkassen

Auszug aus der

Inaugural-Dissertation

der philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Albert Diggelmann

von Fischenthal, Zürich

Von der philosophischen Fakultät II auf Antrag des Herrn Prof. W. Friedli und nach dem Gutachten des Herrn Prof. A. Bohren angenommen.

Bern, den 21. November 1935.

Der Dekan: Prof. Dr. P. Arbenz

Gedruckt bei Stämpfli & Cie., Bern

1944

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Es ist mir ein Bedürfnis, an dieser Stelle den Herren Prof. Moser †, Prof. Friedli †, Prof. Crelier †, Prof. Scherrer, Prof. Koenig und Prof. Amonn für die mir während des Studiums erwiesene Unterstützung und Anregung meinen besten Dank auszusprechen.

Zu ganz besonderem Dank bin ich Herrn Prof. Bohren verpflichtet. Durch seine reichen Anregungen und unter seiner Leitung konnte die vorliegende Arbeit entstehen und durchgeführt werden.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546501_0015

Beiträge zur Darstellung des Wesens und der Grundlagen der Bausparkassen

Wie in bevölkerungsstatistischen und versicherungstechnischen Fragestellungen hat man es bei Bausparproblemen mit gewissen Veränderungen innerhalb von Personengesamtheiten zu tun. Bei den Bausparkassen sind die Veränderungen innerhalb der Bestände an vorgeschriebene Leistungen der Personen gebunden. Wir interessieren uns für die Auswirkung innerhalb der Gesamtheit und auf die Gesamtheit. Mit der kontinuierlichen Methode sollen die verschiedenen Bestände dargestellt werden.

Verwendete Bezeichnungen

a) Bestände.

$E(t)$	Gesamtheit der einer Kasse bis zur Zeit t beigetretenen Mitglieder
$H(t)$	Anzahl der zur Zeit t vorhandenen Mitglieder
$S(t)$	Anzahl der Sparer zur Zeit t
$T(t)$	Anzahl der Tilger zur Zeit t
$A(t)$	Anzahl der Ausgetretenen zur Zeit t

b) Zeit und Zeitabschnitte.

t	Laufende Zeit seit Kassenbeginn
n	Individuelle Vertragszeit
w	Wartezeit
s	Sparzeit
s_m	Maximale Sparzeit. Zeitspanne, die ein Sparer benötigt, um die ganze Vertragssumme mit dem Sparbeitrag selbst anzusparen
σ	Beitragslose Wartezeit
y	Tilgungszeit

c) Summen.

B Vertrags- oder Bausparsumme pro Mitglied

d) Beiträge und Zinsgrössen.

a Netto-Sparbeitrag
b Netto-Tilgungsbeitrag
i Jahreszins

e) Intensitäten.

δ Zinsintensität
$\varphi(t)$ Erneuerungsfunktion
$\mu(t)$ Intensität der Austritte zur Zeit t

I. Die individuelle Grundgleichung

In der Nettoberechnung gelte das Äquivalentsprinzip: Leistung gleich Gegenleistung. Dann gilt auf Ende der Sparzeit für jedes Mitglied die individuelle Grundgleichung

$$a\frac{e^{\delta s}-1}{\delta}+b\frac{1-e^{-\delta y}}{\delta}=B. \qquad (1)$$

Werden in der Nettorechnung Soll- und Habenzins verschieden angesetzt, der Habenzins etwa δ_1, so wird der Tilgungsbeitrag b_1, und es folgt aus (1) für $\delta_1 > \delta$, dass $b_1 > b$ sein muss. Umgekehrt wird für $\delta_1 < \delta$, $b_1 < b$. In diesem letzteren Falle reichen die eingenommenen Mittel nicht aus, um alle Verpflichtungen zu erfüllen. Der gerechte Tarifzinsfuss, bei dem weder Sparer noch Tilger zu Schaden kommen, muss dem marktüblichen Zins entsprechen [1]).

Je nach der Zuteilung erkennt man in der Grundgleichung vier Fälle:

---

[1]) *E. Köpf:* Die rechnerischen Grundlagen des offenen Sparerkreises. Die Wohnung, 1930, Heft 8.

Schwegler: Einige Grundprobleme der Bausparkassen. Versicherungsarchiv, März 1931.

Riebesell: Bausparmathematik. Wirtschaft und Recht der Versicherung, Berlin 1931.

v. Beckerath: Bausparkassenmathematik. Versicherungsarchiv, Juli 1931.

Vajda: Die Äquivalenz im Bauspartarif. Versicherungsarchiv, August 1932.

a) Die Zuteilung (z) erfolgt sofort beim Eintritt in die Kasse. Die Wartezeit (w) und die Sparzeit (s) werden Null, und die Tilgungszeit wird zur Vertragszeit

$$w = s = 0,$$
$$y = n.$$

b) Die Zuteilung erfolgt zwischen $s = 0$ und $s = s_m$. Wartezeit und Sparzeit werden identisch, und die Vertragszeit ist Sparzeit, vermehrt um die Tilgungszeit

$$s = w,$$
$$n = s + y.$$

c) Die Zuteilung erfolgt im Momente, in dem der Sparer die Vertragssumme selbst angespart hat. Die Sparzeit wird zur maximalen Sparzeit und ist gleich der Wartezeit wie auch der Vertragszeit

$$s = s_m = w = n,$$
$$= \frac{1}{\delta} \log \frac{a + \delta B}{a}.$$

d) Die Zuteilung erfolgt erst nach der maximalen Sparzeit, im Zeitpunkt $t = s_m + \sigma \cdot \sigma$ ist beitragsfreie Wartezeit. In ihr wird die bereits angesparte Vertragssumme nur noch aufgezinst. Zwischen den Grössen ergeben sich die Beziehungen

$$w = s_m + \sigma,$$
$$y = 0,$$
$$w = n.$$

In allen vier Fällen wird die Vertragszeit aus Wartezeit und Tilgungszeit zusammengesetzt

$$n = w + y.$$

In der umgewandelten Grundgleichung (1)

$$b\, e^{-\delta y} - a\, e^{\delta s} = b - a - \delta B$$

ist die rechte Seite Diskriminante für die verschiedenen Tarifsysteme:

$$b - a - \delta B \gtreqless 0.$$

Sie werden der Reihe nach in der Literatur als überharmonischer, harmonischer, und unterharmonischer Tarif bezeichnet.

II. Die geschlossene Kasse

Die Entwicklung der Personengesamtheiten in der geschlossenen Kasse vermittelt ein Bild über die Vorgänge in der offenen Kasse. In ihr ist die Anzahl der Mitglieder $E(t)$ von Anfang an konstant $= E$. Jedes Mitglied habe die Vertragssumme B.

Die Abwicklung der Vorgänge geschieht nach Massgabe der vorhandenen Mittel. Diese werden nach ihrem Eingange an die Mitglieder kontinuierlich zugeteilt. Dabei ist die Reihenfolge der Zuteilung beliebig. Mit der Zuteilung der Vertragssumme B tritt der Sparer in den Bestand der Tilger über. Vom Bestande der Tilger scheidet er aus, wenn seine Leistungen mit Zinsen die Vertragssumme B ergeben. Ausser den Vorgängen, welche an die Zahlungen — Sparbeitrag a und Tilgungsbeitrag b — gebunden sind, sollen keine Einflüsse die Veränderung der Bestände bewirken. Insbesondere bleibt der Storno unberücksichtigt.

Der Sparerbestand $S(t)$, der Tilgerbestand $T(t)$ und die Intensität der Austretenden durch Erfüllung der Vertragsbedingungen $\mu(t)$ seien differenzierbare Funktionen. Im Zeitelement dt gehen an Sparbeiträgen $aS(t)dt$ ein und an Tilgungsbeiträgen $bT(t)dt$. Diese werden verwendet, um pro Sparer die Vertragssumme B zuzuteilen. Damit ist die Veränderung des Sparerbestandes

$$dS(t) = -\frac{1}{B}[aS(t) + bT(t)]\,dt. \tag{2}$$

Zur Ersetzung von $T(t)$ gilt im Zeitpunkt, wo auch Austritte erfolgen, die Beziehung

$$dT(t) = -dS(t) - T(t)\,\mu(t)\,dt,$$

worin $T(t)\,\mu(t)dt$ noch unbekannt ist.

Die Zahl der Austritte steht mit der Wartezeit der Austretenden in einer festen Beziehung. Der bei t Austretende sei bei $w(t)$ zugeteilt worden. Da in der geschlossenen Kasse alle bei $t = 0$ eintreten, wird die Vertragszeit des bei t Ausscheidenden $n = t$. Für diejenigen, die zwischen $t = 0$ und $t = s_m$ austreten, ist Gleichung (1)

$$a\,\frac{e^{\delta w(t)}-1}{\delta}-b\,\frac{1-e^{-\delta\{t-w(t)\}}}{\delta}=B,$$

daraus
$$w(t)=\frac{1}{\delta}\log\frac{b-a-\delta B}{b\,e^{-\delta t}-1}. \tag{3}$$

Die andern, welche erst bei $t > s_m$ zur Zuteilung gelangen, haben die Wartezeit

$$w(t)=t. \tag{4}$$

Die im Zeitelement dt Austretenden sind also im entsprechenden Element $dw(t)$ zur Zuteilung gelangt. Somit können nach (2) die Austritte dargestellt werden

$$T(t)\,\mu(t)\,dt=\frac{1}{B}\left[a\,S\{w(t)\}+b\,T\{w(t)\}\right]dw(t)=-d\,S\{w(t)\}. \tag{5}$$

Also sind die Austritte im Element dt

$$\begin{aligned} d\,T(t)&=-d\,S(t)+d\,S\{w(t)\},\\ T'(t)&=S'\{w(t)\}\,w'(t)-S'(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Gleichung (2) differenziert und (6) eingesetzt ergibt

$$S''(t)=\frac{b-a}{B}\,S'(t)-\frac{b}{B}\,S'\{w(t)\}\,w'(t). \tag{7}$$

Diese Differentialfunktionalgleichung gibt sämtliche Bestandesveränderungen des Sparerbestandes einer geschlossenen Kasse wider, worin die verschiedenen Tarifsysteme als Spezialfälle enthalten sind. Ihre Lösung kann schrittweise erfolgen.

Die erste Zeitspanne, von der Gründung der Kasse bis zum ersten Austritt, ergibt für alle Systeme dieselbe Lösung. In diesem Zeitabschnitte wird die Austrittsintensität $\mu(t)=0$. Somit wird nach (5)

$$S'\{w(t)\}\,w'(t)=0$$

und Gleichung (7) geht bis zum Zeitpunkt t_1, wo die ersten Austritte erfolgen, über in die Form

$$S''(t) = \frac{b-a}{B} S'(t). \tag{8}$$

Unter Berücksichtigung, dass $S'(0) = -\frac{aE}{B}$ und $S(0) = E$, ergibt sich die Lösung

$$S(t) = \frac{E}{b-a}\left[b - a e^{\frac{b-a}{B}t}\right], \tag{9}$$

und

$$T(t) = \frac{aE}{b-a}\left[e^{\frac{b-a}{B}t} - 1\right]. \tag{10}$$

Die drei Tarifsysteme weisen von den ersten Austritten an grundsätzliche Unterschiede auf, weshalb sie gesondert betrachtet werden.

a) Der harmonische Tarif

Da $b - a - \delta B = 0$ ist, wird die Grundgleichung (3)

$$e^{\delta w(t)}\left[b\, e^{-\delta t} - a\right] = 0.$$

Daraus ergibt sich für t und damit für die Vertragsdauer

$$t = \frac{1}{\delta} \log \frac{b}{a} = \frac{1}{\delta} \log \frac{a + \delta B}{a} = s_m. \tag{11}$$

Sie ist vom Zuteilungszeitpunkt unabhängig und für alle Mitglieder gleich der maximalen Sparzeit s_m. Alle Austritte erfolgen im gleichen Zeitpunkte.

Für die Bestände ergibt sich aus (9) und (10)

$$S(t) = \frac{E}{\delta B}\left[b - a\, e^{\delta t}\right],$$

$$T(t) = \frac{aE}{\delta B}\left[e^{\delta t} - 1\right], \tag{12}$$

woraus

$$S(s_m) = 0,$$

$$T(s_m) = E.$$

Alle Sparer sind in s_m Tilger geworden.

Die mittlere Wartezeit ist als mittlere Zugehörigkeitsdauer zum Bestande der Sparer zu betrachten

$$\bar{w}_m = \frac{1}{E} \int_0^{s_m} S(t)\, dt$$

$$= \frac{b s_m - B}{\delta B}. \qquad (13)$$

Bei ansteigendem Zinsfuss δ nimmt die mittlere Wartezeit ab. Sie ist am grössten im zinslosen System.

Auch der zinslose harmonische Tarif ergibt sich als Spezialfall aus obigen Gleichungen. Die Bestände verlaufen linear.

b) Der überharmonische Tarif

Der Zugeteilte entrichtet einen Tilgungsbeitrag, der den Sparbeitrag und den Zins für die ganze Vertragssumme übertrifft,

$$b > a + \delta B.$$

Der früher Zugeteilte wird also seine Verpflichtungen der Kasse gegenüber früher erfüllt haben als derjenige, der später zugeteilt wurde. Es werden demnach vor $t = s_m$ Austritte zu verzeichnen sein. Der Zeitpunkt des ersten Austritts, t_1, ergibt sich für den bei $t = 0$ Zugeteilten, dessen Wartezeit $w(t) = 0$ ist, aus Gleichung (3)

$$t = \frac{1}{\delta} \log \frac{b e^{\delta w(t)}}{b - a - \delta B + a e^{\delta w(t)}}, \qquad (14)$$

daraus

$$t_1 = \frac{1}{\delta} \log \frac{b}{b - \delta B}.$$

Bis t_1 gelten die Bestandesgleichungen (9) und (10). Von t_1 an treten die Tilger aus, die von 0 bis t_1 zugeteilt wurden. Allgemein treten in der Zeitspanne von t_λ bis $t_{\lambda+1}$ diejenigen Tilger aus, die von $t_{\lambda-1}$ bis t_λ zugeteilt wurden. Speziell scheidet bei t_λ derjenige aus, der bei $t_{\lambda-1}$ vom Bestande der Sparer zum Bestande der Tilger übergetreten ist. Aus (14) ergibt sich die Gleichung zur Bestimmung der t_λ.

$$t_\lambda = \frac{1}{\delta} \log \frac{b^\lambda}{(b-a-\delta B)^\lambda + a(b-a-\delta B)^{\lambda-1} + ab(b-a-\delta B)^{\lambda-2} + \ldots + ab^{\lambda-2}(b-a-\delta B) + ab}$$

Die t_λ konvergieren gegen die maximale Sparzeit s_m, indem

$$\lim_{\lambda \to \infty} t_\lambda = \frac{1}{\delta} \log \frac{a + \delta B}{a} = s_m \tag{16}$$

wird.

An Hand der Differentialgleichung (7) kann der Sparerbestand in jedem Intervall dargestellt werden. Für das erste Intervall von $t = 0$ bis $t = t_1$ ist dies in (9) bereits geschehen. Auch $w(t)$ ist in (3) bestimmt. Der Veränderung des Argumentes t von $t = t_\lambda$ bis $t = t_{\lambda+1}$ entspricht ein Anwachsen der Funktion $w(t)$ von $t_{\lambda-1}$ bis t_λ. Daraus ergibt sich für das λ. Intervall aus Gleichung (7)

$$S''_\lambda(t) = \frac{b-a}{B} S'_\lambda(t) - \frac{b}{B} S'_{\lambda-1}\{w(t)\} w'(t). \tag{17}$$

Darin entspricht der Funktion $S_{\lambda-1}$ der Verlauf der Funktion S im $(\lambda-1)$. Intervall. Diese Gleichung lässt sich integrieren, wobei für die Konstantenbestimmung zu berücksichtigen ist

$$S'_\lambda(t_{\lambda-1}) = S'_{\lambda-1}(t_{\lambda-1}),$$
$$S_\lambda(t_{\lambda-1}) = S_{\lambda-1}(t_{\lambda-1}),$$
$$w(t_{\lambda-1}) = t_{\lambda-2},$$

und daher $$S_{\lambda-1}\{w(t_{\lambda-1})\} = S_{\lambda-1}(t_{\lambda-2}).$$

Die Lösung für den Sparerbestand im λ. Intervall ist

$$S_\lambda(t) = S_{\lambda-1}(t_{\lambda-1})\, e^{\frac{b-a}{B}(t-t_{\lambda-1})} - \frac{K_{\lambda-1} B}{b-a}\left[1 - e^{\frac{b-a}{B}(t-t_{\lambda-1})}\right] -$$
$$- \frac{b}{B} e^{\frac{b-a}{B}t} \int_0^t S_{\lambda-1}\{w(\tau)\}\, e^{-\frac{b-a}{B}\tau} d\tau, \tag{18}$$

worin

$$K_{\lambda-1} = S'_{\lambda-1}(t_{\lambda-1}) - \frac{b-a}{B} S_{\lambda-1}(t_{\lambda-1}) + \frac{b}{B} S_{\lambda-1}(t_{\lambda-2}). \tag{19}$$

Damit ist es gelungen, den Sparerbestand über alle Intervalle zu berechnen. Eine analoge Beziehung ergibt sich für den Tilgerbestand, indem man Gleichung (2) für die Veränderung des Tilgerbestandes aufstellt und darin $S(t)$ ersetzt.

Die mittlere Wartezeit ergibt sich ebenfalls als mittlere Zugehörigkeitsdauer zum Bestande der Sparer

$$\bar{w}_m = \frac{1}{E} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \int_{t_{\lambda-1}}^{t_\lambda} S_\lambda(\tau)\, d\tau , \qquad (20)$$

wobei $t_0 = 0$ und $t_\infty = s_m$ ist. Diese ist kleiner als diejenige im harmonischen Tarif.

Die Abwicklung der Bestände einer geschlossenen Kasse im überharmonischen Tarif zeigt, wie kompliziert die Probleme bei den Bausparkassen liegen. Trotz vereinfachenden Annahmen gelingt es nicht, explizite in jedem Momente den Sparer- und Tilgerbestand anzugeben. Man muss vielmehr, auch wenn man kontinuierlich rechnet, die Vorgänge früherer Intervalle kennen, um den Stand der Kasse in einem bestimmten Zeitpunkte darstellen zu können.

Ergab im harmonischen Tarif der Verlauf des Sparer- und Tilgerbestandes für die zinslose Kasse einen linearen Verlauf, so lässt sich zeigen, dass im überharmonischen Tarif für die zinslose Kasse formal keine Vereinfachung eintritt und der Verlauf der Bestände ebenfalls exponentiellen Charakter beibehält. Der Grund liegt darin, dass $b - a > 0$ ist. Es lässt sich beweisen, dass im zinslosen System die Vertragsdauer jedes Mitgliedes, und damit die mittlere Wartezeit, länger ist, als wenn mit Zins gerechnet wird.

c) Der unterharmonische Tarif

Die Diskriminante $b = a - \delta B$ ist negativ. *Vajda* [1]) bespricht diesen Fall und zeigt, dass b nicht kleiner sein darf als δB. Schon für $b = \delta B$ wird die Vertragszeit des zuerst Zugeteilten unendlich, weil er die volle Vertragssumme, die er als Darlehen erhalten hat, nur verzinst, aber nicht amortisiert.

---

[1]) *Vajda:* Der derzeitige Stand der Bausparmathematik. Skandinavisk Aktuarietidskrift, VI/1933.

Im unterharmonischen Tarif treten vor Ablauf der maximalen Sparzeit s_m keine Mitglieder aus. Der erste, der bei $t = s_m$ Zugeteilte, verlässt die Kasse, weil er seine Vertragssumme bereits angespart hat. Die verbleibenden Sparer können noch nicht zugeteilt werden. Alle von $t = 0$ bis $t = s_m$ Zugeteilten haben ihre Darlehen noch nicht getilgt. Wir nehmen an, diese Nichtzugeteilten verbleiben weiter in der Kasse und werden ihr Sparguthaben aufgezinst ausbezahlt erhalten. Sie entrichten aber von $t = s_m$ an keinen Sparbeitrag mehr. Es ergibt sich die Besonderheit, dass Sparer mit einer beitragslosen Wartezeit existieren, die bei ihrer Zuteilung aus der Kasse ausscheiden, ohne Tilger zu werden.

Von $t = s_m$ an scheiden die Tilger in umgekehrter Reihenfolge der Zuteilung aus der Kasse aus. Der Letzte, der getilgt hat, ist der bei $t = 0$ Zugeteilte. Seine Vertragszeit ist

$$t_2 = \frac{1}{\delta} \log \frac{b}{b - \delta B}. \tag{21}$$

Die Abwicklung der Bestände gliedert sich nur in zwei Intervalle. Im ersten von 0 bis s_m gibt es keine Austritte. Bis zu diesem Zeitpunkte gelten die Gleichungen (9) und (10). Im Intervall von s_m bis t_2 treten alle im ersten Intervall Zugeteilten in umgekehrter Reihenfolge des Übertrittes zu den Tilgern aus dem Bestande aus. Die Sparer entrichten keine Sparbeiträge mehr und erhalten bei Zuteilung die aufgezinste Vertragssumme. Der Ansatz zur Veränderung des Sparerbestandes ist somit

$$d S_2(t) = - \frac{1}{B e^{\delta (t - s_m)}} b \; T(t) \, dt. \tag{22}$$

Da die Neuzugeteilten von s_m weg nicht mehr in den Bestand der Tilger übertreten, wird die Veränderung des Tilgerbestandes nur noch durch die Austritte bewirkt:

$$d T(t) = - T(t) \, \mu(t) \, dt ;$$

nach (5) wegen umgekehrter Reihenfolge positiv

$$T(t) \, \mu(t) \, dt = + dS_1 \{w(t)\},$$

also

$$dT(t) = - dS_1 \{w(t)\}.$$

Von s_m bis t integriert

$$T(t) = -S_1\{w(t)\} + T(s_m) + S_1\{w(s_m)\},$$

in (22) eingesetzt unter Berücksichtigung, dass $w(s_m) = s_m$ und $T(s_m) + S(s_m) = E$, ergibt sich

$$S_2'(t) = \frac{b}{B\, e^{\delta(t-s_m)}} \left[S_1\{w(t)\} - E\right].$$

Durch Integration von s_m bis t unter Berücksichtigung, dass $S_2(s_m) = S_1(s_m)$

$$S_2(t) = S_1(s_m) - \frac{Eb}{\delta B}\left(1 - e^{-\delta(t-s_m)}\right) + \frac{b}{B}\int_{s_m}^{t} S_1\{w(\tau)\}\, e^{-\delta(\tau-s_m)}\, d\tau. \quad (23)$$

Analog ist der Tilgerbestand zu entwickeln.

Die mittlere Wartezeit ergibt sich

$$\bar{w}_m = \frac{1}{E}\left[\int_0^{s_m} S_1(\tau)\, d\tau + \int_{s_m}^{t_2} S_2(\tau)\, d\tau\right].$$

Sie ist grösser als beim harmonischen Tarif.

Auch beim unterharmonischen Tarif lässt sich die zinslose Kasse leicht darstellen. Die Lösung der Differentialgleichung ist explizit möglich und ergibt ebenfalls exponentiellen Verlauf.

An Hand von Zahlenbeispielen können die bisherigen Ergebnisse ausgewertet und graphisch dargestellt werden. Sie bestätigen die erhaltenen Ergebnisse.

III. Die offene Kasse

Bei der offenen Kasse findet im Laufe der Zeit ein Neuzugang von Mitgliedern statt. Sie stellt also eine offene, sich erneuernde Gesamtheit von Personen dar. Wegen der der Kasse zugrunde liegenden Bedingungen unterteilt sich die Gesamtheit in Sparer, Tilger und Ausgetretene. Die Sparer- und Tilgergruppen der offenen Kasse sollen dargestellt werden, wobei die Ergebnisse bei den geschlossenen Kassen weitgehend zu verwenden sind.

In der offenen Kasse sollen die Spar- und Tilgungsbeiträge aller Mitglieder in den gemeinsamen Zuteilungsfonds fliessen. Dadurch wird die Zuteilungsintensität aller Mitglieder beeinflusst. Der Abbau der Sparergruppe kann also nicht durch eine Aneinanderreihung von geschlossenen Kassen dargestellt werden, wie dies in versicherungstechnischen Problemen üblich ist.

Während in der geschlossenen Kasse der Zuteilungsmodus frei gewählt werden kann, muss in der sich erneuernden Gesamtheit die Reihenfolge des Beitritts als Zuteilungsreihenfolge gewählt werden, ansonst die Vorgänge mit unsern mathematischen Hilfsmitteln nur schwer erfassbar sind.

Gegenüber der geschlossenen Kasse ist noch eine weitere Einschränkung zu machen. Beim unterharmonischen Tarif wurde erkannt, dass die Tilger in umgekehrter Reihenfolge, in der sie zugeteilt wurden, die Kasse verlassen. Dadurch wird der Vorgang des Austrittes in der offenen Kasse so kompliziert, dass er in der Rechnung zu unübersichtlichen Ergebnissen führt. Die folgende Betrachtung wird daher für den überharmonischen Tarif durchgeführt, der den harmonischen Tarif als Grenzfall enthält.

Der allgemeine Vorgang im überharmonischen Tarif

Es seien wieder $S(t)$ der Sparerbestand, $T(t)$ der Tilgerbestand und $\mu(t)$ die Intensität der Austritte differenzierbare Funktionen. Die Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$ erfülle die gleichen Bedingungen. Im Element dt treten der Kasse $\varphi(t)dt$ neue Mitglieder bei, und der Anfangsbestand sei Null. Die Zahl der Eingetretenen zur Zeit t ist

$$E(t) = \int_0^t \varphi(t)\,dt\,.$$

Der Sparerbestand nimmt durch Neueintritte zu und vermindert sich durch Zuteilungen nach Massgabe der eingehenden Mittel. Seine Veränderung im Element dt ist

$$dS(t) = \varphi(t)\,dt - \frac{1}{B}\left[a\,S(t) + b\,T(t)\right]dt\,. \qquad (24)$$

$T(t)$ ist zu ersetzen. Für die Veränderung des Tilgerbestandes gilt

$$d\,T(t) = \frac{1}{B}\,[a\,S(t) + b\,T(t)]\,dt - T(t)\,\mu(t)\,dt.$$

Unter Berücksichtigung von (24),

$$d\,T(t) = \varphi(t)\,dt - d\,S(t) - T(t)\,\mu(t)\,dt. \tag{25}$$

Um die Austritte im Element dt mit Hilfe der Sparerfunktion darzustellen, ist eine Beziehung zwischen den im Element dt Austretenden und den im Element dz Zugeteilten zu finden. Der Zeitpunkt des Eintrittes eines Mitgliedes sei ε, der seiner Zuteilung z und derjenige des Austrittes t. Die individuelle Grundgleichung (1) erhält dann die Form

$$a\,\frac{e^{\delta\,(z-\varepsilon)} - 1}{\delta} + b\,\frac{1 - e^{-\delta(t-z)}}{\delta} = B. \tag{26}$$

Soll eine Beziehung zwischen z und t gefunden werden, so muss noch die dritte Unbekannte ε, die in der geschlossenen Kasse Null war, als Funktion von z angegeben werden können. Hiezu kann eine von *Schönwiese* [1]) angegebene Beziehung verwendet werden. Diese bringt die Eintritts-, Zuteilungs- und Austrittszeitpunkte in Zusammenhang mit der als bekannt vorausgesetzten Erneuerungsfunktion.

In der ersten Kassentätigkeit, in der noch keine Austritte erfolgen, sei der Zuteilungszeitpunkt z_{I}. Ihm entspricht ein Eintrittszeitpunkt ε_{I} und ein Austrittszeitpunkt t_{I}. Da nach Reihenfolge des Eintritts zugeteilt wird, sind bei z_{I} alle bei ε_{I} Eingetretenen Tilger. Der erste Austritt erfolgt wie bei der geschlossenen Kasse bei t_1. Es gilt also für jedes $0 < z_{\mathrm{I}} < t_1$ die Beziehung

$$[a\,E(z_{\mathrm{I}}) + (b - a)\,E(\varepsilon_{\mathrm{I}})]\,dz_{\mathrm{I}} = B\,\varphi(\varepsilon_{\mathrm{I}})\,d\,\varepsilon_{\mathrm{I}}.$$

Die im Element dz_{I} von Sparern und Tilgern eingehenden Mittel reichen aus, um den im Element $d\varepsilon_{\mathrm{I}}$ Eingetretenen im Zeitpunkt z_{I} die

---

[1]) *Schönwiese:* Mathematik des Bausparens. Blätter für Versicherungsmathematik, II, 5.

Summe B zuzuteilen. Alle Mitglieder bezahlen a und die Tilger den Zusatzbeitrag $(b - a)$. Durch Integration ergibt sich

$$E(\varepsilon_1) = \frac{a}{B}\, e^{\frac{b-a}{B} z_1} \int_0^{z_1} E(\tau)\, e^{-\frac{b-a}{B}\tau}\, d\tau. \qquad (27)$$

Daraus kann zu jedem z_1 ein ε_1 gefunden werden. Mit Hilfe der Gleichung (26) erhält man den zugehörigen Austrittszeitpunkt t_1. In der Grenze $z_1 = t_1$ sei der Eintrittszeitpunkt mit k bezeichnet und der Austrittszeitpunkt t_1 mit t_2.

Nach den ersten Austritten sei der Zuteilungszeitpunkt z_{II}. Ihm entsprechen der Eintrittszeitpunkt ε_{II} und der Austrittszeitpunkt t_{II}. Die dazugehörige Beziehung von Schönwiese lautet

$$\{a[E(z_1) - E(\varepsilon_1)] + (b - a)[E(\varepsilon_{II}) - E(\varepsilon_1)]\}\, dz_{II} = B q(\varepsilon_{II})\, d\varepsilon_{II}.$$

Durch Integration

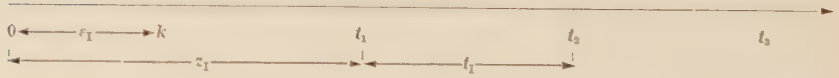
$$E(\varepsilon_{II}) = E(k)\, e^{\frac{b-a}{B}(z_{II} - t_1)} + \frac{a}{B}\, e^{\frac{b-a}{B} z_{II}} \int_{t_1}^{z_{II}} E(z_{II})\, e^{-\frac{b-a}{B} z_{II}}\, dz_{II} -$$

$$- \frac{b}{B}\, e^{\frac{b-a}{B} z_{II}} \int_{t_1}^{z_{II}} E(\varepsilon_1)\, e^{-\frac{b-a}{B} z_{II}}\, dz_{II}. \qquad (28)$$

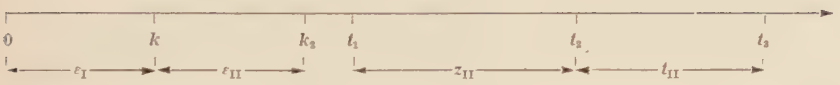
Mit (28) kann zu jedem Zuteilungszeitpunkt z_{II} der entsprechende Eintrittszeitpunkt ε_{II} gefunden werden. Das auftretende ε_1 ist mit der ersten Gleichung von *Schönwiese* (27) und Gleichung (26) als Funktion von z_{II} bestimmt. Der Geltungsbereich von (28) ist damit abhängig vom Variationsbereich des ε_1 und ist infolgedessen beschränkt.

Folgende schematische Darstellung zeigt die Variationsbereiche der verschiedenen Zeitpunkte.

Bis zu den ersten Austritten:



Nach den ersten Austritten:



Nach den ersten Austritten variiert der Zuteilungszeitpunkt z_{II} in den gleichen Grenzen wie der Austrittszeitpunkt der vor k Eingetretenen.

Zu jedem z_{II} kann ein ε_{II} bestimmt werden und mit der Grundgleichung das zugehörige t_{II}. Dem Zuteilungszeitpunkt $z_{II} = t_2$ entspricht der Eintrittszeitpunkt $\varepsilon_{II} = k_2$ und der Austrittszeitpunkt $t_{II} = t_3$. Diese Betrachtung kann für jedes weitere Intervall verwendet werden. ε ist nach dieser Beziehung von Schönwiese intervallweise als Funktion von z bestimmt. Mit der Grundgleichung ist z als Funktion von t angegeben. Für die Bestandesentwicklung wird diese Beziehung verwendet.

Variieren die Austritte von t bis $t + dt$, so ändern die zugehörigen Zuteilungspunkte von $z(t)$ bis $z(t + dt)$. Die im Element dt Austretenden sind im Element $dz(t)$ zur Zuteilung gelangt. Damit sind die Austritte

$$T(t)\,\mu(t)\,dt = \frac{1}{B}\left[a\,S\left\{z(t)\right\} + b\,T\left\{z(t)\right\}\right] dz(t),$$

oder nach (24)

$$T(t)\,\mu(t)\,dt = \varphi\left\{z(t)\right\} dz(t) - dS\left\{z(t)\right\}. \tag{29}$$

In (25) eingesetzt

$$T'(t) = \varphi(t) - S'(t) - \varphi\left\{z(t)\right\} z'(t) + S'\left\{z(t)\right\} z'(t).$$

Wird (24) abgeleitet und T'(t) ersetzt, ergibt sich die Differentialgleichung

$$S''(t) = \frac{b-a}{B}\,S'(t) - \frac{b}{B}\,S'\left\{z(t)\right\} z'(t) + \varphi'(t) - \frac{b}{B}\,\varphi(t) + \frac{b}{B}\,\varphi\left\{z(t)\right\} z'(t). \tag{30}$$

Darin sind alle Vorgänge einer offenen Kasse mit überharmonischem Tarif enthalten. Wie zur Berechnung von $z(t)$ ein intervallweises

Vorgehen notwendig ist, kann der Sparer- und damit der Tilgerbestand ebenfalls nur von Intervall zu Intervall berechnet werden.

Im ersten Intervall, bis zum Zeitpunkt t_1, sind keine Austritte. Es ist also

$$T(t)\,\mu(t) = \varphi\{z(t)\}\,z'(t) - S'\{z(t)\}\,z'(t) = 0\,. \tag{31}$$

Die Differentialgleichung hat hier die Form

$$S''(t) = \frac{b-a}{B}\,S'(t) - \frac{b}{B}\,\varphi(t) + \varphi'(t)\,.$$

Durch Integration ergibt sich unter Berücksichtigung, dass

$$S'(0) = \varphi(0),$$

$$S(0) = 0$$

$$S(t) = e^{\frac{b-a}{B}t} \int_0^t \left[\varphi(\tau) - \frac{b}{B}\,E(\tau)\right] e^{-\frac{b-a}{B}\tau}\,d\tau,$$

und da

$$S(t) + T(t) = E(t),$$

$$T(t) = \frac{a}{B}\,e^{\frac{b-a}{B}t} \int_0^t E(\tau)\,e^{-\frac{b-a}{B}\tau}\,d\tau\,.$$

Analog wie in der geschlossenen Kasse entspricht der Variation von t im Intervall λ ein Verlauf der Funktion $z(t)$ im Intervall $(\lambda - 1)$. Damit ergibt sich aus Gleichung (30) für das λ. Intervall die Differentialgleichung

$$S''_\lambda(t) = \frac{b-a}{B}\,S'_\lambda(t) - \frac{b}{B}\,S'_{\lambda-1}\{z(t)\}\,z'(t) + \varphi'(t) - \frac{b}{B}\,\varphi(t) + \frac{b}{B}\,\varphi\{z(t)\}\,z'(t)\,. \tag{3}$$

Darin ist der Verlauf der Funktion $S_{\lambda-1}(t)$ aus dem Intervall $(\lambda - 1)$, also zwischen $t_{\lambda-2}$ bis $t_{\lambda-1}$ bekannt, und das Argument $z(t)$ ist bei bestimmten Annahmen über $\varphi(t)$ nach Schönwiese bestimmt. Der Verlauf des Sparerbestandes im λ. Intervall ist also aus demjenigen des $(\lambda - 1)$. Intervalles und der Erneuerungsfunktion bestimmt.

Unter der Berücksichtigung der Grenzwerte

$$S'_\lambda(t_{\lambda-1}) = S'_{\lambda-1}(t_{\lambda-1}),$$
$$S_\lambda(t_{\lambda-1}) = S_{\lambda-1}(t_{\lambda-1}),$$
$$z(t_{\lambda-1}) \quad = t_{\lambda-2},$$

ergibt sich die Lösung

$$S_\lambda(t) = S_{\lambda-1}(t_{\lambda-1})\, e^{\frac{b-a}{B}(t-t_{\lambda-1})} - \frac{K_{\lambda-1}B}{b-a}\left(1 - e^{\frac{b-a}{B}(t-t_{\lambda-1})}\right) - \tag{33}$$
$$- e^{\frac{b-a}{B}t} \int_{t_{\lambda-1}}^{t} \left[\frac{b}{B}\left(S_{\lambda-1}\{z(\tau)\} + E(\tau) - E\{z(\tau)\}\right) - \varphi(\tau)\right] e^{-\frac{b-a}{B}\tau}\, d\tau,$$

wobei die Konstanten zusammengefasst sind in

$$K_{\lambda-1} = S'_{\lambda-1}(t_{\lambda-1}) - \frac{b-a}{B} S_{\lambda-1}(t_{\lambda-1}) - \varphi(t_{\lambda-1}) + \frac{b}{B}\left[S_{\lambda-1}(t_{\lambda-2}) + E(t_{\lambda-1}) - E(t_{\lambda-2})\right].$$

Der Tilgerbestand ergibt sich aus der Beziehung

$$S_\lambda(t) + T_\lambda(t) = E(t) - E(\varepsilon) = H(t).$$

Dadurch sind die Bestände im überharmonischen Tarif erschöpfend dargestellt.

Die Wartezeit

Über die Entwicklung der Wartezeiten bei den offenen Bausparkassen ist die bestehende Literatur bereits umfangreich. Eine einheitliche analytische Darstellung der Wartezeitfunktion für den überharmonischen Tarif ist auch bei den einfachsten Annahmen nicht gelungen. Die Beziehungen von *Schönwiese* gestatten, den Eintrittszeitpunkt ε eines im Zeitpunkt z zur Zuteilung gelangenden Mitgliedes durch mechanische Quadratur intervallweise zu berechnen. Die Wartezeit ergibt sich dann aus

$$w(z) = z - \varepsilon.$$

Man kann die Wartezeit auch mit den Beständen der Sparer und Tilger in Beziehung bringen. Der bei t Zugeteilte habe den Eintrittszeitpunkt t_0. Es ist dann

$$w(t) = t - t_0 .$$

Für $t < t_1$ ist der Tilgerbestand gleich der Gesamtheit der bei t_0 Eingetretenen

$$E(t_0) = T(t) \Big|_{t<t_1} . \tag{34}$$

Ist $t > t_1$, kommt noch der Bestand der Ausgetretenen dazu

$$E(t_0) = T(t) + A(t) \Big|_{t>t_1} .$$

Die Ausgetretenen sind

$$A(t) = \int_{t_1}^{t} T(\tau)\, \mu(\tau)\, d\tau$$
$$= E\{z(t)\} - S\{z(t)\},$$

worin $z(t_1) = 0, E(0) = S(0) = 0.$

Also $$E(t_0) = T(t) + E\{z(t)\} - S\{z(t)\}. \tag{35}$$

Aus (34) und (35) kann t_0 berechnet werden, womit die Wartezeit bestimmt ist. Einfacher als die Ermittlung nach der Beziehung von *Schönwiese* ist dies nicht.

Im Beharrungszustande sollen Eintritte, Austritte und Zuteilungen in jedem Moment übereinstimmen. Sparer- und Tilgerbestände müssen also konstant bleiben. Demnach wird

$$S(t) = C_1,$$
$$T(t) = C_2,$$

damit wird aus (24)

$$\varphi(t) = \frac{1}{B}\,[a C_1 + b C_2] = C_3 .$$

Das heisst, die Erneuerungsfunktion als bestimmende Grösse für die Wartezeit muss im Beharrungszustande konstant sein.

Vajda [1]) beweist, dass bei der zinslosen Kasse mit überharmonischem Tarif die Wartezeit zunimmt, bis sie den Wert des Beharrungszustandes asymtotisch erreicht.

E. und A. Krahn [2]), wie auch *Schwegler* [3]) zeigen unter der Annahme der Existenz des Beharrungszustandes Näherungsmethoden zur Ermittlung der Wartezeit.

Spezialfälle

a) Überharmonischer Tarif mit konstantem Neuzugang

Es wird

$$\varphi(t) = c = \text{konstant.}$$

Die Beziehungen von Schönwiese sind dann

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \frac{a\,B}{(b-a)^2}\left[e^{-\frac{b-a}{B}z_{\mathrm{I}}} - \frac{b-a}{B}z_{\mathrm{I}} - 1\right],$$

$$\varepsilon_{\mathrm{II}} = k\,e^{\frac{b-a}{B}(z_{\mathrm{I}}-t_1)} \cdot \frac{a}{B}\,e^{\frac{b-a}{B}z_{\mathrm{II}}}\int_{t_1}^{z_{\mathrm{II}}} z_{\mathrm{II}}\,e^{-\frac{b-a}{B}z_{\mathrm{II}}}\,dz_{\mathrm{II}} + \frac{b}{B}\,e^{\frac{b-a}{B}z_{\mathrm{II}}}\int_{t_1}^{z_{\mathrm{II}}} \varepsilon_{\mathrm{I}}\,e^{-\frac{b-a}{B}z_{\mathrm{II}}}\,dz_{\mathrm{II}}$$

Die weiteren Intervalle werden gleich wie das zweite behandelt.

Die Differenzialgleichung des Sparerbestandes lautet

$$S''(t) = \frac{b-a}{B}\,S'(t) - \frac{b}{B}\left[S'\{z(t)\}\,z'(t) + c\,(1-z'(t))\right].$$

Im ersten Intervall

$$S_1''(t) = \frac{b-a}{B}\,S_1'(t) - \frac{b}{B}\,c\,.$$

[1]) *Vajda:* 1. Bemerkungen zur Bausparmathematik. Versicherungsarchiv, 1932.

2. Der derzeitige Stand der Bausparmathematik. Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1933.

[2]) *E. und A. Krahn:* Beiträge zur Mathematik der Bausparkassen. Neumannzeitschrift, 1931.

[3]) *Schwegler:* Neue Beitrage zur Bausparmathematik. Versicherungsarchiv, 1932.

Unter Berücksichtigung, dass

$$S_1'(0) = \varphi(0) = c,$$

$$S_1(0) = 0,$$

ist die Lösung

$$S_1(t) = \frac{c\,b\,t}{b-a} + \frac{c\,a\,B}{(b-a)^2}\left(1 - e^{\frac{b-a}{B}t}\right).$$

und

$$T_1(t) = \frac{c\,a\,B}{(b-a)^2}\left(e^{\frac{b-a}{B}t} - \frac{b-a}{B}\,t - 1\right).$$

Im λ. Intervall

$$S_\lambda''(t) = \frac{b-a}{B}\,S_\lambda'(t) - \frac{b}{B}\left[S_{\lambda-1}'\{z(t)\}\,z'(t) + c\,(1 - z'(t))\right].$$

Die Integration ergibt keine wesentliche Vereinfachung gegenüber (33).

Die Wartezeit wird:

Im ersten Intervall $t < t_1$ aus (34)

$$w(t) = \frac{b\,t}{b-a} - \frac{a\,B}{(b-a)^2}\left(e^{\frac{b-a}{B}t} - 1\right).$$

Für $t > t_1$ aus (35)

$$w(t) = t - z(t) + \frac{1}{c}\left[S\{z(t)\} - T(t)\right].$$

b) Allgemeiner Vorgang im harmonischen Tarif

Der harmonische Tarif ist ein Spezialfall des überharmonischen. Alle Mitglieder haben die gleiche Vertragszeit n, die aus der individuellen Grundgleichung erhalten wird:

$$n = \frac{1}{\delta}\,\log\,\frac{b}{a} = s_m.$$

Eintritts- und Austrittszeitpunkt stehen in linearem Zusammenhang. Die Austretenden zur Zeit t können durch die Eintritte zur Zeit $(t-n)$ ersetzt werden. Dadurch wird die allgemeine Gleichung (30)

$$S''(t) = \frac{b-a}{B} S'(t) - \frac{b}{B}[\varphi(t) - \varphi(t-n)] + \varphi'(t). \qquad (36)$$

Im ersten Intervall $(0 < t < s_m)$ wird der Sparerbestand

$$S(t) = e^{\delta t} \int_0^t \left[\varphi(\tau) - \frac{b}{B} E(\tau)\right] e^{-\delta\tau} d\tau .$$

Im weitern Bereich $t > s_m$ ist kein intervallweises Vorgehen mehr nötig, da die Austritte nicht mehr vom Zeitpunkt der Zuteilung abhängig sind, sondern direkt durch die Erneuerungsfunktion dargestellt werden können. Durch Integration von (36) von s_m bis t ergibt sich unter Berücksichtigung, dass

$$E(0) = 0,$$
$$E(s_m) = S(s_m) + T(s_m),$$
$$b - a = \delta B,$$

$$S(t) = S(s_m)\, e^{\delta(t-s_m)} - e^{\delta t} \int_{s_m}^t \left\{ \frac{b}{B}[E(\tau) - E(\tau-n)] - \varphi(\tau) \right\} e^{-\delta\tau} d\tau .$$

Der Tilgerbestand ist

$$T(t) = E(t) - S(t) - E(t-n).$$

Die Wartezeit ergibt sich aus den Beständen:

Im ersten Intervall

$$E(t_0) = T(t),$$

und für $t > n$

$$E(t_0) = T(t) + E(t-n),$$

woraus t_0 zu berechnen ist und die Wartezeit bestimmt ist.

c) Harmonischer Tarif mit konstantem Neuzugang

Dieser Fall, als einfachster, wird in der Literatur eingehend behandelt [1]).

Gleichung (30) wird im ersten Intervall

$$S''(t) = \delta S'(t) - \frac{c\,b}{B},$$

woraus für $S'(0) = \varphi(0) = c$ und $S(0) = 0$

$$S(t) = \frac{c\,b\,t}{\delta B} - \frac{c\,a}{\delta^2 B}(e^{\delta t} - 1), \tag{38}$$

und der Tilgerbestand

$$T(t) = \frac{c\,a}{\delta^2 B}(e^{\delta t} - \delta t - 1). \tag{39}$$

Nach den ersten Austritten $t > s_m$ vereinfacht sich die Differentialgleichung weiter zu

$$S''(t) = \delta S'(t),$$

woraus durch Integration zwischen s_m und t unter Berücksichtigung von

$$b - a\,e^{\delta s_m} = 0,$$

$$S'(s_m) = 0,$$

$$a\,\frac{e^{\delta s_m} - 1}{\delta} = B,$$

die Lösung erhalten wird

$$S(t) = c\,\frac{b\,s_m - B}{\delta B},$$

$$T(t) = E(t) - E(t-n) - S(t) \tag{40}$$

$$= c\,\frac{B - a\,s_m}{\delta B}.$$

[1]) *Picard:* Mathematische Theorie des Bausparens. Blätter für Versicherungsmathematik, Band 2, Heft 3.

Die beiden Bestände sind für $t > s_m$ konstant. Die Kasse geht also bei $t = s_m$ bereits in den Beharrungszustand über.

Die Wartezeit ergibt mit den Beständen:

Im ersten Intervall

$$w(t) = t - \frac{1}{c} T(t)$$

$$= \frac{bt}{\delta B} - \frac{a}{\delta^2 B} (e^{\delta t} - 1)$$

und für $t > s_m$ erhalten wir

$$w(t) = n - \frac{1}{c} T(t)$$

$$= \frac{bs_m - B}{\delta B} = w(s_m).$$

Diese Wartezeit im Beharrungszustand ist konstant.

Ergebnisse

Die mathematischen Untersuchungen weichen von den Betrachtungen der meisten Autoren ab, indem sie darauf ausgehen, die Entwicklung der Bestände von Sparern und Tilgern, also Personengesamtheiten, zeitlich zu verfolgen. Bei der Abwicklung der Bestände der Sparer und Tilger sind der Eintritt in den Sparerbestand (Erneuerung), der Übertritt vom Sparer- zum Tilgerbestand (Zuteilung) und das Ausscheiden als Vorgänge zu betrachten.

Unter der Voraussetzung, dass sämtliche auftretenden Funktionen differenzierbar sind, gelingt es, für die Veränderung der Bestände eine allgemeine Differentialgleichung aufzustellen. Sie enthält alle bisher bekannten Ergebnisse als Spezialfälle. Ihre Lösung ist intervallweise formal möglich, wobei für die offene Kasse die Beziehungen von Schönwiese verwendet werden müssen. In den Übergangsstellen zweier

Intervalle stimmen die Ausdrücke für die Bestände und ihre erste Ableitung überein. Die Übergangsstellen weisen also keine Unstetigkeiten auf.

In der geschlossenen Kasse konnten die Bestände aller drei Tarifsysteme formal vollständig dargestellt werden. Die mittlere Wartezeit ergibt sich als eine Summe von Integralen.

In der offenen Kasse muss der unterharmonische Tarif von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Für die andern Tarife konnten die Bestände mit einer entsprechenden Betrachtungsweise wie in der geschlossenen Kasse abgewickelt werden. Die Untersuchungen wurden für beliebigen Neuzugang durchgeführt und nachher für konstanten Neuzugang spezialisiert.

Die Wartezeit kann in allen Fällen ausser den Gleichungen von Schönwiese mit Hilfe der Bestände dargestellt und ihre zeitliche Entwicklung verfolgt werden. Aus der Abhängigkeit der Wartezeit von der Erneuerungsfunktion ergibt sich, dass bei wachsendem Neuzugang die Wartezeiten mit geringerer Intensität zunehmen als bei konstanter oder gar abnehmender Erneuerung. Im Beharrungszustand muss die Erneuerung konstant sein.

Lebenslauf

Geboren am 16. November 1902 in Bern, besuchte ich die hiesigen städtischen Primar- und Sekundarschulen und trat 1918 eine Lehrstelle als Schlosser an. Nach absolvierter Lehre arbeitete ich in verschiedenen mechanischen und elektrotechnischen Werkstätten. Im Herbst 1929 bestand ich die Zulassungsprüfung an die hiesige Universität, um nach erfolgter Immatrikulation versicherungsmathematischen, mathematischen und nationalökonomischen Studien obzuliegen.

Bern, den 12. Juli 1935.